Estabilidade de cunhas rochosas

Formulação, uso e verificação

Josué Labaki
1ª edição · Aplicativo v0.2.0

11 de novembro de 2026

Cálculo do fator de segurança de uma cunha rochosa seca ou da força externa necessária para atingir um alvo, com base em Esquivel e Santos [1] e Kovári e Fritz [2].

1 Modelo e dados de entrada

A cunha rígida é limitada por dois planos de descontinuidade, pela face do talude e por uma superfície superior horizontal. Ela desliza pela interseção dos dois planos, com os dois contatos comprimidos. A altura H vai de O até ABC.

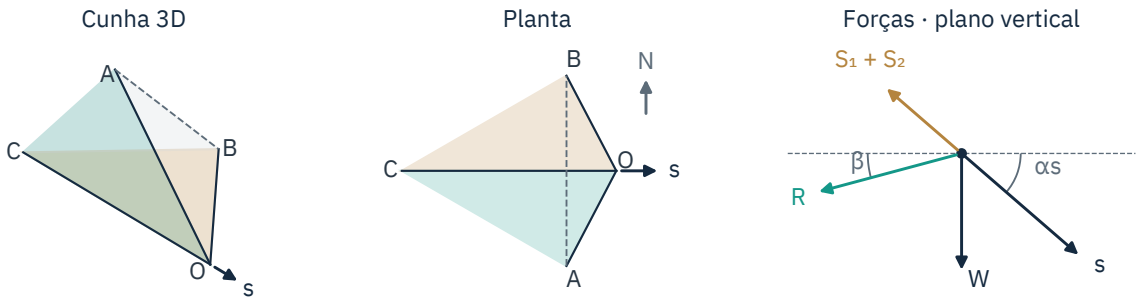


Figura 1. Contatos OAC (plano 1) e OBC (plano 2); face do talude OAB. O versor $\hat{s}$ aponta para fora e para baixo. Setas sem escala.

Entrada	Convenção	Unidade
Direção de mergulho a	Azimute horário a partir do norte, de 0 a 360°, para cada plano e o talude.	grau
Mergulho δ	Inclinação da horizontal; $0 < \delta < 90°$.	grau
Altura H; peso esp. γ	Valores positivos; $W = \gamma V$.	m; kN/m^3
Atrito φ_i; coesão c_i	Independentes em cada contato; $0 \le \varphi_i < 90°$ e $c_i \ge 0$.	grau; kPa
Força R; inclinação β	$R \ge 0$, no plano vertical da interseção; $\beta > 0$ abaixo da horizontal, para dentro do maciço.	kN; grau
Alvo F_S^*	Fator de segurança positivo, no modo de força necessária.	–

2 Como usar

Escolha o modo e edite os dados: resultados e desenhos se atualizam automaticamente. Aceitam-se ponto ou vírgula decimal. O *Estudo paramétrico* admite até 501 pontos; apenas as opções de atrito ou coesão comum alteram os dois planos juntos. Salve e reabra casos em JSON ou exporte resultados em CSV, com unidades e versão. Os exemplos estão em *Método e exemplos*.

3 Geometria e equilíbrio

Adotam-se eixos leste, norte e vertical para cima, com origem em O. Para direção de mergulho a_i e mergulho δ_i, a normal unitária é

$$\hat{n}_i = (\sin\delta_i \sin a_i,\ \sin\delta_i \cos a_i,\ \cos\delta_i). \tag{1}$$

As interseções dos pares de planos com $z = H$ definem A (plano 1 e talude), B (plano 2 e talude) e C (planos 1 e 2). As posições são medidas a partir de O. A geometria fornece

$$V = \frac{|A \cdot (B \times C)|}{6}, \qquad A_1 = \frac{\|A \times C\|}{2}, \qquad A_2 = \frac{\|B \times C\|}{2}, \qquad \hat{s} = -\frac{C}{\|C\|}. \tag{2}$$

Os sinais das normais e a posição do talude são conferidos antes do cálculo. Os contatos devem delimitar uma cunha finita cuja interseção aflore na face do talude.

Se $\hat{e}_h$ é a projeção horizontal unitária de $\hat{s}$ e $\hat{e}_z$ aponta para cima, a direção da força externa e a resultante aplicada são

$$\hat{r} = -\cos\beta\,\hat{e}_h - \sin\beta\,\hat{e}_z, \qquad \mathbf{F} = -W\hat{e}_z + R\hat{r}. \tag{3}$$

As normais $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ apontam para dentro da cunha. As reações compressivas N_1, N_2 e a força motriz D são obtidas pelo equilíbrio vetorial:

$$[\,\hat{n}_1\ \hat{n}_2\ -\hat{s}\,] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ D \end{bmatrix} = -\mathbf{F}. \tag{4}$$

A resistência disponível de cada contato é $S_i = N_i \tan\varphi_i + c_i A_i$. Com $D > 0$, resulta

$$F_S = \frac{S_1 + S_2}{D} = \frac{N_1 \tan\varphi_1 + N_2 \tan\varphi_2 + c_1 A_1 + c_2 A_2}{D}. \tag{5}$$

Assim, $F_S = 1$ corresponde ao equilíbrio limite do mecanismo considerado; $F_S < 1$ indica resistência disponível inferior à força motriz. O valor não representa uma verificação de todos os mecanismos possíveis do talude.

4 Força necessária

Para uma geometria e uma direção de R fixas, o equilíbrio é linear em R. Escrevendo $N_i = N_i^0 + R n_i$ e $D = D^0 + Rd$, os valores com sobrescrito zero correspondem a $R = 0$; n_i e d são as variações por unidade de força. Para $F_S = F_S^*$,

$$R = \frac{F_S^* D^0 - N_1^0 \tan\varphi_1 - N_2^0 \tan\varphi_2 - c_1 A_1 - c_2 A_2}{n_1 \tan\varphi_1 + n_2 \tan\varphi_2 - F_S^* d}. \tag{6}$$

O resultado é recolocado no equilíbrio para conferir o alvo. Se o alvo já é atendido com $R = 0$, a força adicional é zero. A direção escolhida deve permitir atingir o alvo com os dois contatos ativos. R representa uma força aplicada, não a capacidade passiva de uma ancoragem.

A versão atual não inclui água, tombamento, força transversal à interseção ou deslizamento em um único plano. Planos paralelos, geometrias degeneradas e perda de contato interrompem o cálculo. Quando $D \le 0$, a saída informa ausência de força motriz descendente, em vez de apresentar um fator de segurança negativo.

5 Exemplo completo

O caso *Cunha simétrica · materiais diferentes* verifica geometria, atritos e coesões distintos, força aplicada e cálculo inverso. É um caso numérico, sem associação a um talude real. As direções abaixo são direções de mergulho.

Entradas	Resultados com R = 500 kN
Plano 1: $(a_1, \delta_1) = (30, 60)^\circ$	V = 151,328884 m^3
Plano 2: $(a_2, \delta_2) = (150, 60)^\circ$	$A_1 = A_2$ = 59,116756 m^2
Talude: $(a_T, \delta_T) = (90, 75)^\circ$	W = 4085,879880 kN
H = 10 m; γ = 27 kN/m^3	Mergulho da interseção: 40,893395°
$\varphi_1 = 25^\circ$; $\varphi_2 = 35^\circ$	$N_1 = N_2$ = 2647,741460 kN
c_1 = 5 kPa; c_2 = 15 kPa	D = 2394,469035 kN
R = 500 kN; $\beta = 15^\circ$	F_S = 1,783679686

Com eixos leste, norte e vertical, os vértices superiores são, em metros,

$$A = (-2{,}679492;\ -5{,}119661;\ 10),$$
$$B = (-2{,}679492;\ \ 5{,}119661;\ 10),$$
$$C = (-11{,}547005;\ 0;\ 10).$$

Sem a força externa, obtém-se F_S = 1,460239437. No modo de força necessária, com alvo F_S^* = 1,5 e $\beta = 15^\circ$, a resposta é R = 67,687713 kN. A substituição dessa força na equação de equilíbrio recupera F_S = 1,5.

Uma varredura de φ_1 mantém $\varphi_2 = 35^\circ$. Em $\varphi_1 = 25^\circ$, ela reproduz F_S = 1,783680. Já a opção de atrito comum, com $\varphi_1 = \varphi_2 = 25^\circ$, produz F_S = 1,525039. A distinção é relevante para estudos paramétricos.

6 Referências independentes

Caso	Dados	Publicado	Aplicativo
Itasca [3]	$(a_1, \delta_1) = (130, 40)^\circ$; $(a_2, \delta_2) = (220, 60)^\circ$; $c_i = R = 0$. Atrito comum para F_S = 1.	33,36° (analítico)	33,357221°
Ankara [4]	$(195, 45)^\circ$ e $(105, 70)^\circ$; $\varphi_i = 30^\circ$; $c_i = R = 0$.	F_S = 0,7123 (SWedge)	0,712266

No exemplo Itasca carregado no aplicativo, $\varphi_i = 30^\circ$ fornece F_S = 0,877022. A altura e a atitude do talude completam a ilustração; sem coesão e sem R, o fator de segurança depende das orientações dos contatos e do atrito, e não do tamanho da cunha. Para Ankara, o aplicativo usa talude $(160, 70)^\circ$.

Os confrontos usam os valores publicados, sem nova execução de 3DEC ou SWedge. Em [3], 33,12° é o resultado numérico do 3DEC; 33,36° é a referência analítica. Em [4], o resultado 0,73 atribuído a Kumsar et al. usa ângulos aproximados; aqui são reproduzidas as atitudes que fornecem 0,7123.

7 Verificação da implementação

O núcleo em TypeScript foi comparado com 1.000 casos admissíveis calculados independentemente em Python, com semente fixa 20261111. Foram confrontados volume, áreas, reações, fator de segurança e força necessária, com tolerância relativa de 10^{-9} nos casos regulares. Os testes também cobrem troca dos planos com seus materiais, rotações de azimute, escala geométrica, varreduras de um ponto e entradas fora do domínio.

Os núcleos das listagens MBASIC e HP-65 foram conferidos e transcritos para comparação; os ambientes antigos não foram emulados. As verificações numéricas e seus dados de referência acompanham o código disponível na página do aplicativo.

8 Problemas identificados nas fontes originais

Parâmetro incorreto nas varreduras de [1]. As condições das linhas 1230 e 1420, pp. 271–275, podem encaminhar a marcação de apenas um atrito com x minúsculo para o ramo que altera ambos. O mesmo ocorre para as coesões, nas linhas 1260 e 1450. No exemplo da seção 5, confundir as duas opções de atrito reduz o resultado em cerca de 14,5%. O aplicativo vincula a variação a um campo explícito e separa as opções comuns.

Inicialização e tamanho das varreduras de [1]. Quando `VI=VF`, as linhas 1150–1160 saltam a atribuição `X(1)=VI`. Além disso, os vetores têm limite 30, sem limitação correspondente do número de pontos. A nova implementação inicializa todos os pontos e verifica intervalo, incremento e tamanho.

Ângulo inconsistente em [2], p. 111, §7.2. O texto apresenta 28,7° e 24,9° para o mergulho da mesma interseção. Os dados e o programa *SLOPE A* fornecem 28,703710°; 24,9° é incompatível com essa geometria. O fator $\lambda = 1{,}31$ é uma interpolação; o cálculo direto fornece 1,302906.

Singularidade evitável em [2], p. 108. A fatoração de *SLOPE B* usa $1/Z$, com $Z = F_S^* \sin\alpha_s - t\cos\alpha_s$, onde t reúne a contribuição do atrito na seção transversal. Ela falha quando $Z = 0$, mesmo em casos cuja resposta é $R = 0$. O cálculo direto da força elimina essa divisão intermediária.

Referências

[1] Esquivel, E. R.; Santos, C. A. F. F. *Programa para análise de estabilidade de cunhas em taludes rochosos*. pp. 261–275. Equações e listagem MBASIC; data não identificada na cópia consultada.

[2] Kovári, K.; Fritz, P. *Stabilitätsberechnung ebener und räumlicher Felsböschungen*. Rock Mechanics, 8, 73–113, 1976. doi:10.1007/BF01239761.

[3] Itasca. *Sliding Wedge*, documentação 3DEC 7.0. Solução analítica e comparação numérica.

[4] Rocscience. *SWedge Verification Manual*, 2022, §1.3, pp. 18–19. Caso de Ankara, atribuído a Kumsar, Aydan e Ulusay (2000), doi:10.1007/s006030050003.

[5] Rocscience. *SWedge Theory Manual: Safety Factor Calculations, Tetrahedral Wedges*, 2022, §§3–4. Critérios de contato e mecanismos de deslizamento.

Aplicativo e arquivos: `https://ssilab.org/resources/rock-wedge`.

Citação deste manual: Labaki, J. (2026). *Estabilidade de cunhas rochosas: formulação, uso e verificação*. SSI Lab Manuals, 01, 1ª edição. FEM/Unicamp.